

## 第三版前言

本书的编写吸取了南京邮电大学“电磁场与电磁波”课程教学团队长期从事本科教学的实践经验，教材的内容非常适合于电子信息类专业的本科生，也可以作为其他专业学生或工程技术人员的参考书。

本书一直作为南京邮电大学通信工程、电子信息工程、电子科学与技术以及电磁场与无线技术等专业本科生的教材。根据几年来的教学经验，作者对本书进行第二次修改。本次修改的宗旨是加强实用性。在第5章中调整章节，集中介绍基本辐射单元的电磁场和天线的主要辐射特性，使学生对课程理论知识的应用更加明晰；修改插图，尤其是在第6章均匀平面波的入射、反射和折射分析时，采用三维立体插图，表达方式更加形象化；修改部分例题和习题，加强理论的综合应用；每章增加若干思考题，加强学生对所学知识应用的了解；此外，还配套提供若干小视频，对课程的一些重点内容的掌握起到画龙点睛的作用。

本书2011年获得“江苏省精品教材”称号，2017年入选科学出版社第三批普通高等教育“十三五”规划教材。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬希读者不吝指正。

作者

2018年3月



# 第一版前言

电磁学是人类在利用自然、改造自然的长期实践中逐步形成的一门自然科学分支，它在与其他相关学科的相互渗透和相互促进中，不断地获得发展和完善，同时也极大地推动着通信、雷达、广播、导航、遥感等一系列电子科技的革新和进步。当今，电磁学已成为无线电电子学领域里的一门重要基础学科，电磁学方面的课程已成为各国理工科大学的必修基础课。

目前，国内外比较著名的电磁学类书籍已经不少。这些书籍的基本内容虽然大同小异，但在材料取舍、结构、侧重、阐述诸方面却各具特色。在本书的编写中，笔者汲取了南京邮电大学该课程教学群体长期从事本科教学的实践经验，注意参考和比较了国内外一些同类书籍的特色，并以此为基础，形成了本书的一些特点。这些特点主要表现为：

(1)在第1章“矢量分析”中，比较系统地介绍了矢量分析中的一些基本概念和基本定理，为全书提供了一个完整的数学预备知识。对于不具备这方面知识的读者，学好这一章将为后面章节的学习打下良好的基础。对于那些已经学过这一内容的读者而言，这一章则可作为他们自学和复习的资料。

(2)在第2章“宏观电磁现象的基本定律”中，将大学普通物理课程中的电磁学内容作了简要回顾，介绍了电磁学中的一些基本物理量和一些基本电磁定律，直至引出麦克斯韦方程组积分形式。接着，再以这些物理课程内容为基础，直接导出时变电磁场麦克斯韦方程组微分形式和电磁场边界条件，使读者很快地进入本课程核心内容。这种安排的直接好处至少有两个，一是可以与先导课程(物理课)有一定重叠，以利承上启下，平稳过渡，保持教学内容的连续性；二是可以避免与物理课程内容过多重复，节省教学课时。

(3)在第3章“静电场及其边值问题的解法”及第4章“恒定电场与恒定磁场”中，分别讨论了静止电荷产生的电场和恒定电流的电场与磁场。这些场是时变电磁场在诸场量不随时间而变化条件下的特例。令诸场量随时间的变化率等于零，便可直接从麦克斯韦方程组及其边界条件导出静电场和恒定场的基本方程和边界条件，这种由“一般”到“特殊”的叙述方法称作“演绎法”，它与传统的从“特殊”到“一般”的“归纳法”叙述方式正好相反。“归纳法”叙述顺序是先介绍静电场，再讨论恒定电场与磁场，最后才研究时变电磁场。这种叙述顺序虽然与电磁学由“简”到“繁”历史发展过程相一致，比较容易被人们所接受，但却与物理课程内容产生了过多的和不必要的重复。我们选择“演绎法”，除了因为它可以避免“归纳法”的上述缺陷以外，还因为它将有利于读者较早地形成电磁场与电磁波的整体概念，并能较好地培养学生利用一般规律分析和解决具体问题的能力。

(4)在第3章对静电场的讨论中，重点放在静电场边值问题的求解方法上。这些方法的重要性不仅表现在求解静电问题本身，更主要的是表现在它可以推广和延伸到求解各

类复杂电磁问题。边值问题的求解方法很多，我们只介绍其中一些最流行和最具代表性的方法，在解析方法方面，除了提到直接积分法和镜像法以外，重点讨论三种常用正交坐标系下的分离变量法。在数值方法方面，既介绍“场域型”数值方法，又介绍“边界型”数值方法。在这两类数值方法中，有限差分法被选择作为前者的代表，而矩量法被选择作为后者的代表。

(5)从第5章开始就转入对电磁波的讨论，直至本书第8章。在这一部分中，电磁波理论中的一些最基本内容均有涉及：既介绍了电磁波的辐射(第5章)，又介绍了电磁波的传播(第6~8章)；既介绍了电磁波在无界空间中的传播(第6章)，又介绍了电磁波沿导波结构的传播(第7、8章)；既介绍了电磁波在无反射情况下的传播(第6章的前两节)，又介绍了电磁波在传播过程中遇到障碍物时的反射与折射(第6章的后两节)；等等。总体来说，若把专门介绍数学预备知识的第1章除外，电磁波部分占了全书的一半以上。我们之所以这样安排，主要是考虑到电磁波内容与电磁工程实际联系比较紧密，需要加强。另外，采用“演绎法”组织教材内容，也使电磁场内容的减少成为可能。

本书是为通信电子类专业本科生而写的，但也可以作为其他专业学生或工程技术人员的参考书。全书共分8章，每章结尾均配备了一定数量的习题，并在本书最后给出了部分习题的答案。习题数量要比教学中实际需要和学生有可能完成的数量要多一些，教师可根据具体情况自行选择。本教材的教学参考学时为48~80学时，可由授课教师按学时情况以及教学要求选用。

本书由徐立勤执笔，曹伟定稿。书稿完成后，南京邮电大学的吴志忠教授审阅了全书并提出了若干改进意见。

由于编者水平有限，时间也比较紧迫，疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

2005年9月于南京邮电大学

## 主要物理量的符号、单位和量纲

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
长度	$L, l$	米	m	L
质量	$m$	千克	kg	M
时间	$t$	秒	s	T
电流	$I, i$	安培	A	I
矢量磁位	$A$	韦伯每米	Wb/m	$MLI^{-1}T^{-2}$
磁感应强度	$B$	特斯拉	T	$MI^{-1}T^{-2}$
电纳	$B$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
电容	$C$	法拉	F	$I^2T^4M^{-1}L^{-2}$
真空中光速	$c$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
电位移	$D$	库仑每平方米	C/m <sup>2</sup>	$ITL^{-2}$
电场强度	$E$	伏特每米	V/m	$MLI^{-1}T^{-3}$
电场力	$F_e$	牛顿	N	$MLT^{-2}$
磁场力	$F_m$	牛顿	N	$MLT^{-2}$
频率	$f$	赫兹	Hz	$T^{-1}$
电导	$G$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
磁场强度	$H$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
位移电流	$I_d, i_d$	安培	A	I
全电流	$I_t, i_t$	安培	A	I
体电流密度	$J$	安培每平方米	A/m <sup>2</sup>	$IL^{-2}$
位移电流密度	$J_d$	安培每平方米	A/m <sup>2</sup>	$IL^{-2}$
全电流密度	$J_t$	安培每平方米	A/m <sup>2</sup>	$IL^{-2}$
面电流密度	$J_s$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
行波系数	$K$			
波数	$k$	弧度每米	rad/m	$L^{-1}$
电感	$L$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
互感	$M$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
折射率	$n$			
电极化强度	$P_e$	库仑每平方米	C/m <sup>2</sup>	$ITL^{-2}$
磁化强度	$P_m$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
功率	$P$	瓦特	W	$ML^2T^{-3}$
电荷[量]	$Q, q$	库仑	C	IT
电阻	$R$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$

续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
坡印亭矢量	$\mathbf{S}$	瓦特每平方米	W/m <sup>2</sup>	MT <sup>-3</sup>
平均坡印亭矢量	$\mathbf{S}_{av}$	瓦特每平方米	W/m <sup>2</sup>	MT <sup>-3</sup>
驻波比	$S$			
周期	$T$	秒	s	T
折射系数, 透射系数	$T$			
电压	$U(V)$	伏特	V	ML <sup>2</sup> I <sup>-1</sup> T <sup>-3</sup>
速度	$\mathbf{v}$	米每秒	m/s	LT <sup>-1</sup>
相速	$\mathbf{v}_p$	米每秒	m/s	LT <sup>-1</sup>
群速	$\mathbf{v}_g$	米每秒	m/s	LT <sup>-1</sup>
能量, 功	$W$	焦耳	J	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
能量密度	$w$	焦耳每立方米	J/m <sup>3</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
电场能量密度	$w_e$	焦耳每立方米	J/m <sup>3</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
磁场能量密度	$w_m$	焦耳每立方米	J/m <sup>3</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
电抗	$X$	欧姆	$\Omega$	ML <sup>2</sup> I <sup>-2</sup> T <sup>-3</sup>
导纳	$Y$	西门子	S	I <sup>2</sup> T <sup>3</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-2</sup>
特性导纳	$Y_c$	西门子	S	I <sup>2</sup> T <sup>3</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-2</sup>
阻抗	$Z$	欧姆	$\Omega$	ML <sup>2</sup> I <sup>-2</sup> T <sup>-3</sup>
特性阻抗	$Z_c$	欧姆	$\Omega$	ML <sup>2</sup> I <sup>-2</sup> T <sup>-3</sup>
波阻抗	$Z_w$	欧姆	$\Omega$	ML <sup>2</sup> I <sup>-2</sup> T <sup>-3</sup>
衰减常数	$\alpha$	奈培每米	Np/m	L <sup>-1</sup>
相位常数	$\beta$	弧度每米	rad/m	L <sup>-1</sup>
反射系数	$\Gamma$			
传播常数	$\gamma$	每米	m <sup>-1</sup>	L <sup>-1</sup>
透入深度	$\delta$	米	m	L
介电常数	$\epsilon$	法拉每米	F/m	I <sup>2</sup> T <sup>4</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup>
真空介电常数	$\epsilon_0$	法拉每米	F/m	I <sup>2</sup> T <sup>4</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup>
相对介电常数	$\epsilon_r$			
真空波阻抗	$\eta$	欧姆	$\Omega$	ML <sup>2</sup> I <sup>-2</sup> T <sup>-3</sup>
布儒斯特角	$\theta_B$	弧度	rad	
临界角	$\theta_c$	弧度	rad	
波长	$\lambda$	米	m	L
自由空间波长	$\lambda_0$	米	m	L
截止波长	$\lambda_c$	米	m	L
波导波长	$\lambda_g$	米	m	L
磁导率	$\mu$	亨利每米	H/m	MLI <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>
真空磁导率	$\mu_0$	亨利每米	H/m	MLI <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>

续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
相对磁导率	$\mu_r$			
体电荷密度	$\rho$	库仑每立方米	C/m <sup>3</sup>	ITL <sup>-3</sup>
面电荷密度	$\rho_s$	库仑每平方米	C/m <sup>2</sup>	ITL <sup>-2</sup>
线电荷密度	$\rho_l$	库仑每米	C/m	ITL <sup>-1</sup>
电导率	$\sigma$	西门子每米	S/m	I <sup>2</sup> T <sup>3</sup> M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup>
电通[量]	$\Psi_c$	库仑	C	IT
磁通[量]	$\Psi_m$	韦伯	Wb	ML <sup>2</sup> I <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
电位	$\phi$	伏特	V	ML <sup>2</sup> I <sup>-1</sup> T <sup>-3</sup>
标量磁位	$\phi_m$	安培	A	I
角频率	$\omega$	弧度每秒	rad/s	T <sup>-1</sup>
电极化率	$\chi_e$			
磁化率	$\chi_m$			





# 目 录

第 1 章 矢量分析与场论	1
1.1 矢量的代数运算	1
1.1.1 矢量及其表示法	1
1.1.2 矢量的代数运算	3
1.2 场的微分运算	7
1.2.1 场的基本概念	7
1.2.2 标量场的方向导数和梯度	9
1.2.3 矢量场的通量和散度	11
1.2.4 矢量场的环量和旋度	15
1.2.5 梯度、散度、旋度的比较	19
1.3 矢量恒等式和基本定理	20
1.3.1 重要的恒等式和拉普拉斯算子	21
1.3.2 矢量场的基本定理	22
1.4 常用正交曲线坐标系	27
1.4.1 三种常用的正交坐标系	27
1.4.2 三种常用坐标系的转换	30
1.4.3 三种常用坐标系中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯展开式	31
思考题	32
习题	32
第 2 章 宏观电磁现象的基本定律	35
2.1 基本电磁物理量	35
2.1.1 电荷密度	35
2.1.2 电场强度	37
2.1.3 电极化强度	38
2.1.4 电位移	40
2.1.5 电流密度	41
2.1.6 磁感应强度	43
2.1.7 磁化强度	44
2.1.8 磁场强度	45
2.2 电磁场基本定律	46
2.2.1 库仑定律	46
2.2.2 环量定律和高斯定律	48
2.2.3 安培定律与毕奥-萨伐尔定律	50

2.2.4	磁通连续性定律和安培环路定律	52
2.2.5	法拉第电磁感应定律	54
2.2.6	电荷守恒定律	55
2.3	麦克斯韦方程组	56
2.3.1	麦克斯韦的两个假设	57
2.3.2	麦克斯韦方程组的积分形式	60
2.3.3	麦克斯韦方程组的微分形式	61
2.4	时变电磁场的边界条件	63
2.4.1	边界条件的一般形式	64
2.4.2	边界条件的三种常用形式	66
	思考题	69
	习题	69
<b>第3章</b>	<b>静电场及其边值问题的解法</b>	<b>74</b>
3.1	静电场的基本方程与边界条件	74
3.1.1	静电场的基本方程	74
3.1.2	静电场的边界条件	75
3.2	电位及其电位方程	77
3.2.1	电位和电位梯度	77
3.2.2	电位的微分方程和边界条件	82
3.3	静电场的能量和导体的电容	84
3.3.1	静电场的能量和能量密度	84
3.3.2	导体系统的电容	86
3.4	静电场边值问题的分类以及唯一性定理	89
3.4.1	静电场边值问题的分类	89
3.4.2	静电场唯一性定理	89
3.5	直接积分法	91
3.6	分离变量法	94
3.6.1	直角坐标系中的分离变量法	95
3.6.2	圆柱坐标系中的分离变量法	103
3.6.3	球面坐标系中的分离变量法	107
3.7	镜像法	110
3.7.1	点电荷关于无限大导体平面的镜像法	110
3.7.2	点电荷关于导体球面的镜像法	114
3.7.3	点电荷关于无限大介质平面的镜像法	116
3.7.4	线电荷关于无限长圆柱导体面的镜像法	118
3.8	静电场的数值解法	120
3.8.1	有限差分法	121
3.8.2	矩量法	126

思考题	130
习题	130
<b>第 4 章 恒定电场与恒定磁场</b>	<b>136</b>
4.1 恒定电场基本方程与边界条件	136
4.1.1 导体内部恒定电场的基本方程	136
4.1.2 导体内部恒定电场的边界条件	137
4.2 恒定电场的电位与静电比拟法	137
4.2.1 恒定电场的电位和边界条件	137
4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导	138
4.2.3 恒定电场的静电比拟法	140
4.3 恒定磁场基本方程与边界条件	141
4.3.1 恒定磁场的基本方程	141
4.3.2 恒定磁场的边界条件	142
4.4 矢量磁位和标量磁位	144
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位	145
4.4.2 恒定磁场的标量磁位	150
4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感	152
4.5.1 恒定磁场的能量和能量密度	153
4.5.2 载流回路的电感	153
思考题	156
习题	157
<b>第 5 章 电磁波的辐射</b>	<b>160</b>
5.1 时谐电磁场的基本方程和边界条件	160
5.1.1 基本场量的复数表示式	160
5.1.2 电磁场基本方程的复数形式	162
5.1.3 电磁场边界条件的复数形式	163
5.1.4 复介电常数和复磁导率	164
5.2 时变电磁场的矢量磁位和标量电位	166
5.2.1 时变电磁场矢量磁位和标量电位的定义	166
5.2.2 时变电磁场矢量磁位和标量电位的达朗贝尔方程	167
5.2.3 时变电磁场矢量磁位和标量电位的积分表示式	169
5.2.4 时谐电磁场的矢量磁位和标量电位	172
5.3 坡印亭定理与坡印亭矢量	174
5.3.1 时变电磁场的坡印亭定理与坡印亭矢量	174
5.3.2 时谐电磁场的坡印亭定理与复坡印亭矢量	175
5.4 基本辐射单元的辐射场	178
5.4.1 电基本振子的辐射场	178
5.4.2 磁基本振子的辐射场	182

5.4.3	惠更斯元的辐射场	186
5.5	对称天线的辐射场和辐射特性	191
5.5.1	对称天线的辐射场	191
5.5.2	对称天线的辐射特性	193
5.6	均匀直线式天线阵的辐射场和辐射特性	198
5.6.1	均匀直线式天线阵的辐射场	198
5.6.2	均匀直线式边射阵和端射阵	200
	思考题	201
	习题	201
<b>第 6 章</b>	<b>均匀平面波的传播</b>	<b>205</b>
6.1	均匀平面波在理想介质中的传播	205
6.1.1	沿着 $z$ 轴方向传播的均匀平面波	205
6.1.2	沿任意方向传播的均匀平面波	214
6.2	均匀平面波在导电媒质中的传播	218
6.2.1	导电媒质中均匀平面波的电磁场	218
6.2.2	均匀平面波在弱导电媒质中的传播	222
6.2.3	均匀平面波在良导电媒质中的传播	223
6.3	均匀平面波对不同媒质分界面的垂直入射	226
6.3.1	均匀平面波对理想介质平面的垂直入射	226
6.3.2	均匀平面波对理想导体平面的垂直入射	231
6.3.3	均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射	234
6.4	均匀平面波对不同媒质分界面的斜入射	237
6.4.1	均匀平面波对理想介质平面的斜入射	237
6.4.2	均匀平面波对理想导体平面的斜入射	245
	思考题	248
	习题	249
<b>第 7 章</b>	<b>均匀波导中的导行电磁波</b>	<b>252</b>
7.1	导行电磁波的一般分析方法	252
7.1.1	横向场和纵向场的亥姆霍兹方程	253
7.1.2	用纵向场表示的横向场	254
7.1.3	传播模式及其传播特性	255
7.2	矩形波导中的导行电磁波	260
7.2.1	直角坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解	260
7.2.2	矩形波导中导行电磁波的传播模式	262
7.2.3	矩形波导中导行电磁波的传播特性	264
7.2.4	矩形波导中若干常用传播模式的场结构	267
7.3	圆形波导中的导行电磁波	271
7.3.1	圆柱坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解	271

7.3.2	圆形波导中导行电磁波的传播模式	273
7.3.3	圆形波导中导行电磁波的传播特性	275
7.3.4	圆形波导中若干常用传播模式的场结构	278
7.4	传输功率与传输损耗	280
7.4.1	传输功率	281
7.4.2	管壁电流	283
7.4.3	传输损耗	286
7.5	同轴线中的导行电磁波	289
7.5.1	同轴线中的主模	289
7.5.2	同轴线中的高次模	291
7.6	光导纤维中的导行电磁波	292
7.6.1	光导纤维中导行波的特征方程	293
7.6.2	光导纤维中传播模式及其截止条件	294
	思考题	298
	习题	299
<b>第 8 章</b>	<b>均匀传输线中的导行电磁波</b>	<b>302</b>
8.1	均匀传输线中导行电磁波的传播模式	302
8.1.1	均匀传输线中的主模	302
8.1.2	均匀传输线中的高次模	305
8.2	均匀传输线的基本方程及其稳态解	310
8.2.1	均匀传输线的分布参数及其等效电路	310
8.2.2	均匀传输线的基本方程	311
8.2.3	均匀传输线基本方程的稳态解	312
8.2.4	均匀传输线基本方程稳态解的不同表示形式	313
8.3	均匀传输线的特征参数	316
8.3.1	特性阻抗	316
8.3.2	传播常数	318
8.4	均匀传输线的等效阻抗和反射系数	320
8.4.1	等效阻抗	320
8.4.2	反射系数	321
8.4.3	等效阻抗与反射系数的关系	322
8.5	无耗均匀传输线	324
8.5.1	终端接任意负载时的无耗均匀传输线	324
8.5.2	无耗均匀传输线上的行波	328
8.5.3	无耗均匀传输线上的驻波	329
8.6	史密斯圆图	333
8.6.1	复平面上的反射系数圆	333
8.6.2	阻抗圆图	335

---

8.6.3 导纳圆图	339
思考题	342
习题	342
参考文献	346
附录	347
常用的矢量公式	347
常用导体材料的参数	349
常用介质材料的参数	349
常用的物理常数	350
习题答案(部分)	351

# 第 1 章 矢量分析与场论

电磁理论的一个重要的概念就是关于场的概念，例如，两个电荷之间的作用力是由于一个电荷与另一个电荷的场相互作用的结果。同时，电磁理论中出现的一些基本物理量有很多都是矢量，如电场强度  $\mathbf{E}$ 、磁场强度  $\mathbf{H}$ 、电流密度  $\mathbf{J}$  等。并且一些用来描述电磁现象基本规律的方程也都是矢量函数的微分方程或积分方程，如麦克斯韦方程组。因此，矢量分析和场论是电磁理论重要的数学基础。本章仅讨论在电磁理论中所需要的矢量分析与场论中的主要内容，包括矢量的基本代数运算和场量的梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算以及矢量场的恒等式和基本定理。最后，还给出了三种常用坐标系及其梯度、散度、旋度等算子在这三种坐标系中的表示式。

## 1.1 矢量的代数运算

自然科学中的物理量，按其是否具有方向属性来区分，可分为标量和矢量两大类。标量是指只有大小而无方向的物理量，如长度、质量、时间、电荷、电阻等都是标量。矢量是指既有大小又有方向的物理量，如力、速度、加速度、电场强度、磁场强度等都是矢量。矢量的代数运算与一般的代数运算有着很大的不同。

### 1.1.1 矢量及其表示法

为便于区别矢量与标量，在本书中矢量均用黑斜体字母表示，如  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$  等，而标量则用斜体字母表示，如  $f$ 、 $\Phi$ 、 $U$  等。

#### 1. 矢量与单位矢量

在三维空间中，任意一个矢量  $\mathbf{A}$  均可表示为一条有方向的线段。该线段的长度代表矢量  $\mathbf{A}$  的大小或模，而该线段的方向代表矢量  $\mathbf{A}$  的方向。

如果一个矢量的模等于 1，则该矢量被称为单位矢量。单位矢量既可以用来表示某一个指定方向，如波的传播方向、各种坐标系中坐标轴的方向等，也可以用来表示某一个矢量的方向。

用来代表矢量  $\mathbf{A}$  的方向的单位矢量被写作  $\mathbf{e}_A$ 。任意一个矢量  $\mathbf{A}$  均可借助代表其大小的模  $A$  和代表其方向的单位矢量  $\mathbf{e}_A$  表示成

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_A A \quad (1.1.1)$$

于是有

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1.2)$$

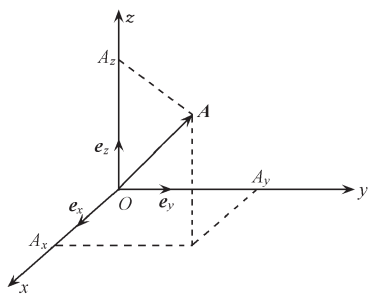


图 1.1.1 矢量及其表示法

由此可见, 矢量  $\mathbf{A}$  的单位矢量  $\mathbf{e}_A$  是一个方向与该矢量相同而模等于 1 的矢量。

## 2. 矢量表示法

在三维空间, 可以根据需要利用不同的正交坐标系将任意一个矢量通过该矢量在三个坐标轴上的投影, 即三个分量来表示。

以直角坐标系为例, 如图 1.1.1 所示, 矢量  $\mathbf{A}$  可以表示成一条由坐标原点出发的有方向的线段。设直角坐标系中沿三个坐标轴正方向上的单位矢量分别为  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , 若矢量  $\mathbf{A}$  在这三个单位矢量方向上的投影, 即三个分量分别为  $A_x, A_y, A_z$ , 则矢量  $\mathbf{A}$  可唯一地表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.1.3)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的模或大小  $A$  可通过  $\mathbf{A}$  的三个坐标分量  $A_x, A_y, A_z$  表示成

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1.4)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的单位矢量  $\mathbf{e}_A$  则可表示成

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma \quad (1.1.5)$$

式中,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  分别为

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.6)$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.7)$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.8)$$

可以看到,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示矢量  $\mathbf{A}$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的夹角。事实上,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  正是单位矢量  $\mathbf{e}_A$  在直角坐标系中的三个分量, 决定着矢量  $\mathbf{A}$  的方向, 故它们被称为矢量  $\mathbf{A}$  的方向余弦, 且

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

由此可得

$$|\mathbf{e}_A| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$$

即单位矢量  $\mathbf{e}_A$  的模等于 1。

在其他的坐标系中, 矢量的表示形式和直角坐标系具有类似结果。

## 3. 位置矢量与距离矢量

在三维空间, 由坐标原点  $O$  出发引向空间任一点  $P(x, y, z)$  的有方向线段, 称为点  $P$



的位置矢量或矢径,用矢量  $\mathbf{r}$  表示。在直角坐标系中,如图 1.1.2 所示,因为位置矢量  $\mathbf{r}$  的三个坐标分量分别为  $x, y, z$ , 故它可以表示为

$$\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1.1.9)$$

该位置矢量  $\mathbf{r}$  的模  $r$  应等于线段  $\overline{OP}$  的长度,即

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1.10)$$

而它的单位矢量  $\mathbf{e}_r$  应为

$$\mathbf{e}_r = e_x \frac{x}{r} + e_y \frac{y}{r} + e_z \frac{z}{r} \quad (1.1.11)$$

设  $\mathbf{r}$  表示点  $P(x, y, z)$  的位置矢量,  $\mathbf{r}'$  表示另一个点  $P'(x', y', z')$  的位置矢量, 即

$$\mathbf{r}' = e_x x' + e_y y' + e_z z' \quad (1.1.12)$$

则由点  $P'$  出发引向点  $P$  的矢量  $\mathbf{R}$  称为该两点之间的距离矢量。在直角坐标系中, 距离矢量可以表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = e_x (x - x') + e_y (y - y') + e_z (z - z') \quad (1.1.13)$$

距离矢量  $\mathbf{R}$  的模  $R$  表示的是点  $P$  和点  $P'$  之间的距离, 即

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.1.14)$$

而它的单位矢量  $\mathbf{e}_R$  则应为

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = e_x \frac{(x - x')}{R} + e_y \frac{(y - y')}{R} + e_z \frac{(z - z')}{R} \quad (1.1.15)$$

在其他的坐标系中, 由于在不同点的单位矢量一般不是完全相同的, 所以距离矢量的直接计算比较复杂, 必须利用空间解析几何分析或者转换到直角坐标系中进行计算。

### 1.1.2 矢量的代数运算

矢量的代数运算包含矢量之间的相加、相减和相乘以及矢量与标量的相乘。两个矢量的代数运算都对应有几何解释(用图形表示), 其结果与这两个矢量的大小和方向有关, 均可以用这两个矢量的大小及其之间的夹角来表示。但是, 矢量的代数运算更常用的是通过坐标系中矢量的各个分量来计算。本节我们只讨论最简单的直角坐标系中矢量的代数运算。在其他的坐标系中矢量的代数运算可以按照同样的方式来讨论。

由于三维空间中的矢量具有三个坐标分量, 因此对矢量的运算也就是对矢量的三个分量的运算。设矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  在直角坐标系中分别可以表示成

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$$

和

$$\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$$

很显然, 若矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  相等, 即

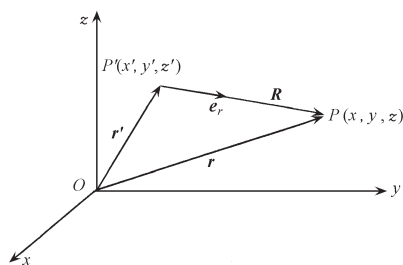


图 1.1.2 位置矢量与空间矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (1.1.16)$$

也就是说,它们具有相同的大小和方向,则在直角坐标系下,矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  必有相等的坐标分量,即

$$A_x = B_x, \quad A_y = B_y, \quad A_z = B_z \quad (1.1.17)$$

由此可知,一个矢量  $\mathbf{A}$  经平移后所得到的新矢量  $\mathbf{A}'$  与原矢量相等,如图 1.1.3 所示,即  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ 。

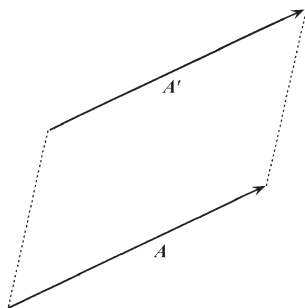


图 1.1.3 矢量平移

### 1. 矢量与标量的乘积

已给矢量  $\mathbf{A}$  与标量  $k$ , 若矢量  $\mathbf{B}$  的各分量分别等于矢量  $\mathbf{A}$  的相应分量与标量  $k$  的乘积, 则矢量  $\mathbf{B}$  称为矢量  $\mathbf{A}$  与标量  $k$  的乘积, 记为  $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$  或  $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ 。在直角坐标系下

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = e_x kA_x + e_y kA_y + e_z kA_z \quad (1.1.18)$$

即

$$B_x = kA_x, \quad B_y = kA_y, \quad B_z = kA_z \quad (1.1.19)$$

若  $k$  为大于零的实数, 则  $k$  与  $\mathbf{A}$  相乘相当于将矢量  $\mathbf{A}$  伸长 ( $k > 1$ ) 或缩短 ( $k < 1$ )  $k$  倍, 而方向保持不变; 反之, 若  $k$  为小于零的实数, 则  $k$  与  $\mathbf{A}$  相乘相当于将  $\mathbf{A}$  伸长 ( $|k| > 1$ ) 或缩短 ( $|k| < 1$ )  $|k|$  倍, 同时方向也变为相反的方向。特别是, 当  $k = -1$  时,  $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$  称为  $\mathbf{A}$  的负矢量。它是一个与原矢量  $\mathbf{A}$  大小相等, 方向相反的矢量。

### 2. 矢量加法和减法

已给矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$ , 若将矢量  $\mathbf{B}$  平移以使它的始点与矢量  $\mathbf{A}$  的终点相重合, 则从矢量  $\mathbf{A}$  的始点出发引向矢量  $\mathbf{B}$  的终点的矢量  $\mathbf{C}$ , 称为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  相加得出的和矢量, 如图 1.1.4 所示, 记为  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。而矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $-\mathbf{B}$  相加所得出的矢量  $\mathbf{D}$ , 称为矢量  $\mathbf{A}$  减去矢量  $\mathbf{B}$  的差矢量, 如图 1.1.5 所示, 记为  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ 。

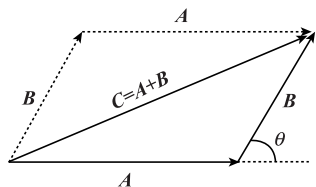


图 1.1.4 矢量加法

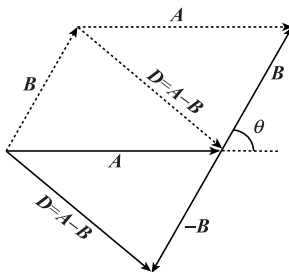


图 1.1.5 矢量减法

由图 1.1.4 和图 1.1.5 容易得到和矢量  $\mathbf{C}$  和差矢量  $\mathbf{D}$  的大小可以分别表示成

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \quad (1.1.20)$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} \quad (1.1.21)$$

式中,  $\theta$  均为矢量  $A$  与矢量  $B$  之间的夹角。事实上, 由图中可以看出, 两个矢量的和矢量  $C$  和差矢量  $D$  的大小就等于由该两个矢量所组成的平行四边形的两个对角线的长短。

从矢量的加、减法定义可知, 在直角坐标系中, 两个矢量相加或相减得出的矢量的三个分量分别等于该两个矢量对应的三个分量的相加或相减, 即

$$C = A + B = e_x(A_x + B_x) + e_y(A_y + B_y) + e_z(A_z + B_z) \quad (1.1.22)$$

$$D = A - B = e_x(A_x - B_x) + e_y(A_y - B_y) + e_z(A_z - B_z) \quad (1.1.23)$$

亦即

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \quad (1.1.24)$$

$$D_x = A_x - B_x, \quad D_y = A_y - B_y, \quad D_z = A_z - B_z \quad (1.1.25)$$

矢量加法满足交换律和结合律。

交换律

$$A + B = B + A \quad (1.1.26)$$

结合律

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (1.1.27)$$

矢量减法不满足交换律。

$$A - B \neq B - A$$

要注意, 只有矢量和矢量之间才能进行相加或相减。

### 3. 矢量的标量积和矢量积

矢量和矢量之间定义了乘法运算, 但未定义除法运算, 并且矢量与矢量之间的乘积分为标量积(结果为标量)和矢量积(结果为矢量)。

已给矢量  $A$  与矢量  $B$ , 两者的标量积  $a = A \cdot B$  定义为矢量  $A$  与矢量  $B$  的模以及矢量  $A$  与矢量  $B$  之间夹角  $\theta$  的余弦三者的乘积, 如图 1.1.6 所示, 即

$$a = A \cdot B = |A||B|\cos\theta \quad (1.1.28)$$

标量积又称为点积。从图 1.1.6 中可以看出,  $|B|\cos\theta$  是矢量  $B$  在矢量  $A$  方向的投影, 因此,  $A$  与  $B$  的标量积应等于  $A$  的模与  $B$  在  $A$  方向上的投影的乘积。同理,  $|A|\cos\theta$  是矢量  $A$  在矢量  $B$  方向上的投影,  $A$  与  $B$  的标量积也等于  $B$  的模与  $A$  在  $B$  方向上的投影的乘积。当其中一个矢量是单位矢量时, 这一点特别有意义。例如,  $A \cdot e_x = A_x$  就是矢量  $A$  在  $x$  轴方向上的投影。

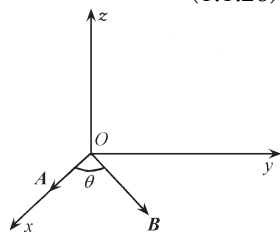


图 1.1.6 矢量的标量积

标量积的一个简单的物理实例是力  $F$  作用一段位移  $S$  后所做的功  $W$ , 即  $W = F \cdot S$ 。

标量积满足交换律和分配律。

交换律

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.1.29)$$

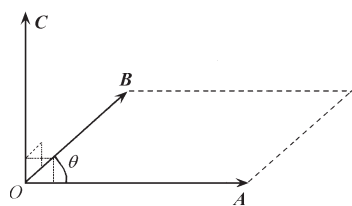


图 1.1.7 矢量的矢量积

分配律

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1.1.30)$$

已给矢量  $A$  和矢量  $B$ ，两者的矢量积  $C = A \times B$  按下述规则定义：它的模等于矢量  $A$ ， $B$  的模以及矢量  $A$ ， $B$  之间夹角  $\theta$  的正弦三者的乘积，而方向垂直于  $A$ ， $B$  两矢量所构成的平面，其指向按“右手定则”来确定，如图 1.1.7 所示，即

$$C = A \times B = e_n AB \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.1.31)$$

矢量积又称为叉积。

所谓右手定则是指当右手食指指向矢量  $A$  的方向，中指指向矢量  $B$  的方向，则大拇指的指向就是矢量积  $C = A \times B$  的方向，如图 1.1.8(a) 所示。“右手定则”又称为“右手螺旋定则”，即矢量积  $C = A \times B$  的方向就是在右手螺旋从矢量  $A$  转到矢量  $B$  时的前进方向，如图 1.1.8(b) 所示。

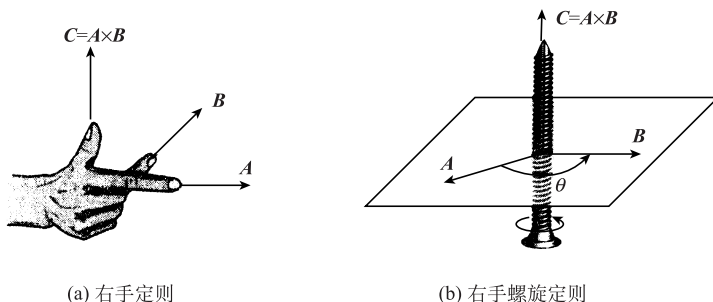


图 1.1.8 右手定则和右手螺旋定则

矢量积的一个简单的例子是平行四边形的面积。如图 1.1.7 所示，由矢量  $A$  和矢量  $B$  所构成的平行四边形的面积  $S$  就等于这两个矢量  $A$  和  $B$  的矢量积的大小，即  $S = |A \times B|$ 。

矢量积只满足分配律，即

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (1.1.32)$$

矢量积不满足交换律。事实上，从矢量积定义可见， $A$  与  $B$  叉积顺序的交换将导致矢量积结果矢量的反向，即

$$A \times B = -B \times A \quad (1.1.33)$$

作为特殊情形可以看到，若  $A$  与  $B$  垂直，即它们之间的夹角  $\theta = 90^\circ$ ，则它们的标量积等于零，而矢量积最大，等于这两个矢量的模的乘积；若  $A$  与  $B$  平行，即  $\theta = 0^\circ$ ，则矢量积等于零，而标量积最大，等于这两个矢量的模的乘积。反过来说也是对的。若两个非零矢量  $A$  和  $B$  的标量积等于零，则  $A$  与  $B$  必然相互垂直；若  $A$  和  $B$  的矢量积等于零，则  $A$  与  $B$  必然相互平行。

对于直角坐标系的三个坐标单位矢量  $e_x$ ， $e_y$ ， $e_z$  而言，它们相互垂直，且满足右

手螺旋定则, 即

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (1.1.34)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1.1.35)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (1.1.36)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1.1.37)$$

由此可得在直角坐标系中用坐标分量形式表示的矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  的标量积和矢量积分别为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1.38)$$

和

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.1.39)$$

矢量积的公式还可借助行列式简洁地表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1.40)$$

根据标量积和矢量积的定义及性质, 读者不难证明下面两个很有用的矢量恒等式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.1.41)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1.42)$$

值得注意的是, 式(1.1.42)所列出的双重叉积  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  一般不等于  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ , 即矢量积不满足结合律。

## 1.2 场的微分运算

物理量和物理量之间不仅需要进行代数运算, 还需要进行积分和微分的运算。本节我们只讨论场的微分运算, 即场的梯度、散度和旋度。关于场的积分运算, 可以参考 1.4 节。

### 1.2.1 场的基本概念

若某空间中的每一个点都对应着某个物理量的一个确定值, 就称在该空间中定义了这个物理量的场或函数。若这个物理量是标量, 则这个场或函数称为**标量场**或**标量函数**, 如一幢建筑物内的温度分布、一个区域内的电位分布等。若这个物理量是矢量, 则这个场或函数称为**矢量场**或**矢量函数**, 如某河流区段内水流的速度分布、一个区域内电场强度的分布等。

若标量场中各点标量值的大小都相同, 则称场中的物理量是**常数**或**常量**; 若矢量场中各点矢量的大小和方向都相同, 则称场中的物理量为**常矢**或**均匀场**。若场中的物理量在各点所对应的值不随时间而变化, 则这个场称为**静态场**或**恒定场**; 否则, 就称为**时变场**。

此外，在电磁理论中还有几种重要的场的概念。例如，静电场是无旋场和有源场，也称有势场或保守场；恒定磁场是无源场和有旋场，又称管型场或旋涡场。这些场的具体定义通过后面的讨论将很容易理解。

### 1. 标量场的等值面

在标量场中，为了直观地研究物理量在场中的分布状况，常常需要考察场中有相同物理量的点，也就是该物理量取相同数值的点。由所有具有相同数值的点组成的面就称为标量场的等值面。例如，静电场中的等位面就是电位的等值面。

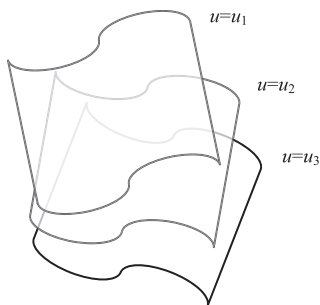


图 1.2.1 标量场的等位面

设在某空间区域中定义了一个标量场  $u = u(x, y, z)$ ，给定常数值  $u_i$ ，则  $u(x, y, z) = u_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  在三维空间中代表着一个个的等值面。常数值  $u_i$  取值不同，给出的等值面就不同，如图 1.2.1 所示。

在空间中，每一点对应着也仅对应着一个确定的函数值，因此它必属于也仅属于一个等值面。空间中所有的点均有等值面通过，所有的等值面均互不相交。但是对于同一个常数值  $u_0$ ，可以有多个互不相交的等值面。

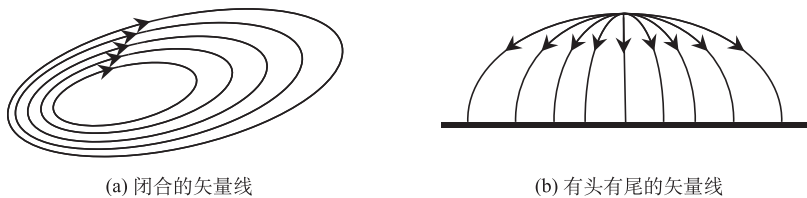
如果是在二维空间，即  $u = u(x, y)$ ，则  $u(x, y) = u_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  代表的就是一条条的等值线。例如，山体的等高线就是一种常用的等值线。

### 2. 矢量场的矢量线(通量线)

为了直观地描述矢量场在场域空间中的分布，我们引入矢量线或通量线的概念。矢量线是一系列有方向的曲线，线上每一点的切线方向代表该点的矢量场方向，而横向的矢量线密度代表该点矢量场的大小。例如，电场中的电力线、磁场中的磁力线以及描述导体中电流的电流线都是矢量线。

设在某空间区域中定义了一个矢量场  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$ 。通过求解矢量的三个分量所满足的微分方程，即  $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$ ，就可以画出矢量场的矢量线，如图 1.2.2 所示。

矢量线可以分为闭合的曲线(无源场或旋涡场)和有头有尾的曲线(有源场或无旋场)。例如，恒定磁场的磁力线就是围绕恒定电流的闭合曲线，而静电场的电力线是从正电荷出发终止于负电荷的有头有尾的曲线。不过，对于大多数矢量场而言，求解该微分方程都



(a) 闭合的矢量线 (b) 有头有尾的矢量线

图 1.2.2 矢量场的矢量线(通量线)

是一个相当复杂的问题。通常，可以利用该矢量场的一些特点以及场在空间的分布特性画出它的示意图。在第7章讨论波导中的场结构时，我们就是根据电磁力线的特点以及波导中电磁场分布的特性画出了波导中的电磁力线(场结构)图。

矢量场中的每一点均有一条矢量线通过，所以矢量线充满了整个矢量场所在的空间。

## 1.2.2 标量场的方向导数和梯度

由于空间各点的标量函数沿着不同的方向具有不同的变化规律，因此必须利用标量场的方向导数以及标量场的梯度来描述标量场的特性。

### 1. 标量场的方向导数

设标量函数  $u(x, y, z)$  具有连续的一阶偏导数。从空间某点  $P(x, y, z)$  出发朝任一方向  $l$  引出一条射线，并在该射线方向上取一邻近点  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ，如图 1.2.3 所示。 $P$  点与  $P'$  点之间的距离为

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

则标量场  $u(x, y, z)$  在  $P$  点沿  $l$  方向的变化率定义为该标量

场在  $P$  点沿  $l$  方向的方向导数，记为  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$ ，即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta l}$$

(1.2.1)

根据多元函数的求导法则，有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P \frac{\partial x}{\partial l} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P \frac{\partial y}{\partial l} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P \frac{\partial z}{\partial l} \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

式中， $\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial l}$ ， $\cos \beta = \frac{\partial y}{\partial l}$ ， $\cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial l}$  为  $P$  点处沿  $l$  方向矢量的方向余弦。该方向上的单位矢量  $e_l$  可以表示为

$$\begin{aligned} e_l &= e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \\ &= e_x \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right) + e_y \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right) + e_z \left( \frac{\partial z}{\partial l} \right) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

### 2. 标量场的梯度

略去下标  $P$ ，考虑标量场  $u(x, y, z)$  在空间任一给定点  $P(x, y, z)$  沿三个坐标轴的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y}$ ， $\frac{\partial u}{\partial z}$  所构成的矢量为

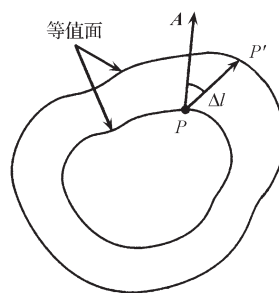


图 1.2.3 标量函数的方向导数

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.4)$$

从式(1.2.2)~式(1.2.4)可以看出空间任一给定点  $P(x, y, z)$  的方向导数可以表示成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_l = A_l \quad (1.2.5)$$

式(1.2.5)表明, 标量函数  $u$  在空间给定点沿  $l$  方向的方向导数等于矢量  $\mathbf{A}$  在该方向上的投影  $A_l$ 。特别地, 当  $l$  的方向与矢量  $\mathbf{A}$  相一致时, 方向导数将达到最大值  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max}$ , 这个值应等于矢量  $\mathbf{A}$  的模  $|\mathbf{A}|$ , 为一个大于零的实数, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{A}| \quad (1.2.6)$$

也就是说, 在空间一给定点, 矢量  $\mathbf{A}$  的大小等于标量函数  $u$  在该点的最大方向的方向导数值, 矢量  $\mathbf{A}$  的方向指向使标量函数  $u$  的值增加最快的方向。这个矢量  $\mathbf{A}$  就被定义为标量场  $u(x, y, z)$  的梯度 (gradient), 记为  $\text{grad}u = \mathbf{A}$ 。

由图 1.2.3 可以看到, 函数  $u$  在空间给定点的梯度  $\text{grad}u$ , 也就是矢量  $\mathbf{A}$ , 将垂直于通过该点的等值面, 并指向使函数值增大的方向, 即该等值面的正法线方向。

梯度在二维空间的一个典型例子是等高线和坡度的关系, 当一个石头从山坡上自然滚落时划出的轨迹就是山坡的坡度 (最大倾斜线)。

为简便起见, 常用下面称为哈密顿 (Hamilton) 算子的矢量符号  $\nabla$  (读作 del) 来表示梯度。在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2.7)$$

借助这个算子, 梯度  $\text{grad}u$  可表示为矢量算子  $\nabla$  和标量函数  $u$  的乘积, 即

$$\begin{aligned} \text{grad}u &= \nabla u \\ &= \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u \\ &= \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

根据梯度的定义和表达式, 可以得到下列梯度的基本公式:

$$\nabla a = 0, \quad a \text{ 为常数} \quad (1.2.9)$$

$$\nabla (au) = a \nabla u, \quad a \text{ 为常数} \quad (1.2.10)$$

$$\nabla (u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1.2.11)$$

$$\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1.2.12)$$

$$\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \nabla u - u \nabla v) \quad (1.2.13)$$

虽然式(1.2.9)~式(1.2.13)可以在直角坐标系下利用式(1.2.8)获得证明, 但它们的正